Exercice 1

Énoncé

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Récap

1. Définition de $\sim$

   Poser $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$

   Se ramener à $\dfrac{u_n}{v_n}$

2. DL de sh et de tan à l'ordre 3

Exercice 2

Énoncé

On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.

2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).

   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R, R[, g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Récap

1. $7 = 3 + 4$

   DSE de $\dfrac{1}{(x+1)}$ et $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

2. $]-1, 1[\subset D$ puis divergence grossière ailleurs

3. (a) Récurrence sur le nombre de dérivations

   (b) Taylor-Young à l'ordre 3 avec $\mathcal{C}^\infty \implies \mathcal{C}^\ni$

Exercice 3

Énoncé

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.

   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée n-ième d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pout tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Récap

1. Récurrences : $(e^u) = u'\ e^u$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

2. Leibniz : Binôme de Newton avec les dérivées

   Attention : Hypothèse : f et g de classe $\mathcal{C}^n$

3. Récurrence sur n

   Séparation des sommes, jeu sur les combinaisons pour avoir $\dbinom{n}{k-1} + \dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k}$

   Attention : Hypothèse : f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ (+1 pour la démonstration)

Exercice 4

Énoncé

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.

   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.

   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Récap

1. $\begin{cases} f\ \mathcal{C}^0 \text{ sur } [a,b] \\ f\ \mathcal{D}^0 \text{ sur }]a,b[\end{cases} \Longrightarrow \exists c \in]a,b[, f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

2. Poser $h \neq 0$ tq $x_0 + h \in [a,b]$

   TAC et revenir à la définition de limite

3. g dérivable en 0 (théorème des gendarmes) puis $\forall x \neq 0, g'(x) = \underbrace{2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\longrightarrow 0} - \underbrace{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite}}$

Exercice 5

Énoncé

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{\big(\ln(n^2+n)\big)^2}$

Récap

PAS FAIT

Exercice 6

Énoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une série géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Récap

1. Poser $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$
   Critère de majoration des séries à termes positifs,
2. D'Alembert, qui donne $e^{f(n)}$ et $f(n) \underset{+\infty}{\sim} 1$

Exercice 7

Énoncé

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Récap

1. Définition de $\sim$ avec ε
   Poser $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ puis encadrer $\dfrac{u_n}{v_n}$
   Cas $\sum v_n$ cv et $\sum v_n$ dv puis symétrie
2. Prendre un équivalent de $|u_n|$

Exercice 8

Énoncé

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum(-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : On pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum(-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 9

Énoncé

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Récap

1. Les f_n définies sur $\mathbb{R}^+$

2. (a) Cas $x = 0$ et $x \neq 0$

   (b) Continuité

   (c) Majoration avec $\dfrac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$

   (d) Attention : existence du sup

   Appliquer $|f_n - f|$ aux $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Exercice 10

Énoncé

On pose $f_n(x) = (x^2+1)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (x^2+1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

Récap

1. Poser $f : x \mapsto (x^2+1)e^x$

   Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par $\dfrac{2e}{n}$

2. Interversion limite-intégrale

   Séparer (x^2+1) en x^2 et 1

Exercice 11

Énoncé

1. Soit X une partie de R, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.

   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{1 + n^2x^2}$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puis sur $[0, +\infty[$.

Récap

1. Par contraposée, contradiction avec $(f_n(x_n) - f(x_n)) \not\longrightarrow 0$
2. (a) Cas $x = 0$ et $x \neq 0$

   (b) Majoration par $\dfrac{1}{1 + n^2a^2}$

   Contre exemple avec $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$ pour $[0, +\infty[$

Exercice 12

Énoncé

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.

   Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = x^n$.

   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Récap

1. Poser $\varepsilon > 0$ puis cas particulier $|f(x) - f_N(x)| \leqslant \varepsilon$

   Continuité de f_N

   Inégalité triangulaire : $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$

2. Non continuité de g

Exercice 13

Énoncé

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \ ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ de E par $||P||_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] | ||P||_1 < 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Récap

1. A compact $\iff$ toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui cv vers $l \in A$
2. Unicité de la limite
3. Par l'absurde, supposer non bornée et montrer que $l \notin A$
4. (a) Bornée : par définition
   (b) Fermée : image réciproque du fermé $\{1\}$ par $|| \cdot ||$ (continue)

Exercice 14

Énoncé

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\right)$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$.

Récap

1. Inégalités avec la norme infinie et $displaystyle\left|\int f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int |f(x)|\mathrm{d}x$
2. Utiliser S_n et S pour raisonner sur des sommes finalisée
3. Utiliser la question 2

Exercice 15

Énoncé

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Récap

1. Penser à écrire les définitions
2. Majorer par la somme de la série des u_n majorant les f_n ($\sum u_n$ cv par hypothèse)
3. D'Alembert

Exercice 16

Énoncé

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Récap

1. Montrer la cvs de la série des $u_n(x)$ pour la définition de la fonction

   Majoration des $u_n'(x)$ pour cvu, puis montrer C^1

2. Téléscopage

Exercice 17

Énoncé

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :
   $\left(\text{La série de fonctions } \sum f_n \text{ cvu sur } A\right) \implies \left(\text{La suite de fonctions } (f_n) \text{ cvu vers } 0 sur A\right)$
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Récap

1. Poser S_n et S la suite des sommes et la somme, puis jouer avec les $||\cdot||_\infty$ et relation de Chasles
2. Disjonction $x = 0$ et $x \neq 0$, montrer $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dans le 2^e cas
   Majorer la norme infinie avec $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Exercice 18

Énoncé

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 19

Énoncé

1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \mapsto t^n \ln t$ est intégrale sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \mathrm{d}t$.

2. Prouver que $f : t \mapsto e^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln t \mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

   Indication : utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Récap

1. IPP
2. DSE de exp puis utiliser la question 1 et CMSTP

Exercice 20

Énoncé

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries suivantes :
   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$?
   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$?
   (c) $\sum \cos n z^n$?

Récap

1. Pas d'équivalence
2. (a) D'Alembert
   (b) Dire $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$
   (c) $|\cos n| \leqslant 1$ et avec $z = 1$

Exercice 21

Énoncé

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge.

   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt{n})^{(-1)^n}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

Récap

1. Penser à écrire les définitions
2. $z=1$ puis bornée (donc $R\geqslant 1$)
3. $(\sqrt{n})^{(-1)^n}\leqslant\sqrt{n}$ puis $\ln(1+x)\leqslant x$

Exercice 22

Énoncé

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x\mapsto \ln(1+x)+\ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x=\dfrac{1}{4}$? $x=\dfrac{1}{2}$? $x=-\dfrac{1}{2}$?

   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Récap

PAS FAIT

Exercice 23

Énoncé

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.

   On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Récap

1. D'Alembert
2. Continuité des f_n puis cvu

Exercice 24

Énoncé

1. Déterminer le rayon de rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Récap

PAS FAIT

Exercice 25

Énoncé

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 26

Énoncé

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n$ est-elle convergente ?

Récap

1. Equivalent des f_n
2. (a) Croissance de l'intégrale
   (b) Convergence dominée avec $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$
3. Théorème des séries alternées

Exercice 27

Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Récap

1. /
2. Majorer avec a
3. Continuité
4. Cv dominée avec $|f_n(x)| \leqslant e^{-x} \leqslant 1 = \varphi(x)$

Exercice 28

Énoncé

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif

   La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Récap

1. Continuité, équivalent en 2, puis équivalent et o de l'équivalent en $+\infty$
2. Continuité, équivalent en 0, puis équivalent en $+\infty$ et disjonction sur a :

   Si $a > 1$: équivalent petit o de $\dfrac{1}{x^{\frac{1+a}{2}}}$ en $+\infty$.

   Si $a \leqslant 1$: $\ln x > 1$ quand $x > e$

Exercice 29

Énoncé

On pose : $\forall x \in]0,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[, f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer Γ' sous forme d'intégrale.

Récap

1. Penser à dire que c'est impropre en 0 et $+\infty$ et pourquoi

   Equivalents : $\dfrac{1}{t^{1-x}}$ en 0 et $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ puis Riemann
2. Dire que la fonction est $\mathcal{C}^1$

   IPP avec barrière
3. Écrire le théorème avec $\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t < 1 \\ |\ln t|e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 30

Énoncé

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Récap

1. Écrire le théorème, utile pour la suite
2. Appliquer avec $\varphi(t) = te^{-t^2}$
3. (a) IPP avec barrière
   (b) Bien dire "L'ensemble des solutions"

Exercice 31

Énoncé

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Récap

1. Passer par la forme exponentielle
2. Variation des constantes

1. Linéariser

Exercice 32

Énoncé

Soit l'équation différentielle $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière en sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.

   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0, 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$?

Récap

1. Bien poser la série entière et sa somme $S(x)$, puis écrire $S'(x)$ et $S''(x)$
2. Ordre 2 mais 1 seul paramètre dans les solutions DSE

Exercice 33

Énoncé

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Récap

1. Norme euclidienne : $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$
2. En $(0,0)$: limite du taux d'accroissement
3. $\partial_1 f(x,x) \longrightarrow \partial_1 f(0,0)$?

Exercice 34

Énoncé

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

Récap

1. Boules plus simple
2. En particulier, $\mathcal{B}\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$

   Réciproque avec les voisinages
3. Penser au 0
4. Garder la même définition de convexe

Exercice 35

Énoncé

E et F désignent deux espaces vectoriels normés
On note $|| \ ||_E$ (respectivement $|| \ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soit f une application de E dans F et a un point de E
   On considère les propositions suivantes :
   P1 : f est continue en a.
   P2 : Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
   Démontrer que les propositions **P1** et **P2** sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Récap

1. Revenir à la définition de continuité
   Réciproque par l'absurde avec $||x_n - a||_E \leqslant \dfrac{1}{n}$
2. Continuité et unicité de la limite

Exercice 36

Énoncé

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
On note $|| \ ||_E$ (respectivement $|| \ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
   P1 : f est continue sur E.
   P2 : f est continue en 0_E.
   P3 : $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, ||f(x)||_F \leqslant k||x||_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme définie par $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
   On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Récap

1. $P1 \implies P2$ direct
   $P2 \implies P3$: prendre $\varepsilon = 1$
   Cas $x \neq 0$ avec $y = \alpha\dfrac{x}{||x||_E}$ et $x = 0$ avec $k = \dfrac{1}{\alpha}$
   $P3 \implies P1$: revenir à la définition de fonction k-lipschitzienne
2. Linéarité de l'intégrale, continuité de la norme

Exercice 37

Énoncé

On note E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes.

Récap

1. (a) Attention aux manœuvres avec le sup
   (b) Majorer $|f(t)|$ par $N_\infty(f)$ dans N_1
   (c) Prendre la fonction identité de (E, N_∞) vers (E, N_1) (continue) et l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert
2. Prendre $f_n(t) = t^n$ et observer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)}$

Exercice 38

Énoncé

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall f \in E, ||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

   Soit $u : E \to E, \quad f \mapsto u(f) = g$ avec $\forall x \in [0,1], g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

   On admet que u est un endomorphisme de E, prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.

   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = ne^{-nt}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul, fixé**.

   Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, ||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Calculer $|||u|||$.
   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, ||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions $1, 2$ et 3 sont indépendantes.

Récap

PAS FAIT

Exercice 39

Énoncé

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans l^2.

   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $|| \; ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$

   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls, sauf peut-être un nombre fini de termes.

   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).

   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Récap

1. (a) Majorer par somme de série convergente

   (b) /

2. $\varphi(x) \leqslant ||x||$ + linéarité

3. Analyse : Utiliser la suite z_n : 1 si n = p, 0 sinon

   Synthèse : $0 \in F^\perp$

Exercice 40

Énoncé

Soit A une algèbre de dimension finie, admettant e comme élément unité et muni d'une norme notée $|| \; ||$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2, ||uv|| \leqslant ||u||||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $||u|| < 1$.

   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

   (b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Récap

PAS FAIT

Exercice 41

Énoncé

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint ces extremums.
   (a) Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
   $(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$
   (b) Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$
   En déduire les valeurs possibles de λ.
3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

Récap

1. C compact et f continue sur C
2. (a) Optimisation sous contrainte de $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 13$
   Attention hypothèse : ∇g ne s'annule pas sur C : montrer que g est $\mathcal{C}^1$
   (b) Déterminant du système (pas de Cramer donc nul)
   Penser à donner les valeurs possibles de λ
3. Disjonction sur $\lambda = 8$ et $\lambda = -5$ et reprendre la 2^e ligne du système et l'équation de C

Exercice 42

Énoncé

On considère les deux équations différentielles suivantes : $\begin{array}{ll} 2xy' - 3y = 0 & (H) \\ 2xy' - 3y = \sqrt{(}x) & (E) \end{array}$

1. Résoudre l'équation (H) sur $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des résultats sur $[0, +\infty[$?

Récap

1. /
2. Variation de la constante
3. f pas dérivable en 0

Exercice 43

Énoncé

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan}x)$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 44

Énoncé

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractéristique de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas toujours vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Récap

1. /
2. Double inclusion
   Réciproque avec suite extraite
3. $A =]-a, 0[$ et $B =]0, b[$

Exercice 45

Énoncé

Les questions 1. et 2. sont indépendantes
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose, $\forall x \in E, \mathrm{d}_A(x) = \inf\limits_{a \in A} ||x - a||$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $\mathrm{d}_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], \mathrm{d}_A(tx + (1-t)y) \leqslant t\mathrm{d}_A(x) + (1-t)\mathrm{d}_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Récap

PAS FAIT

Exercice 46

Énoncé

On considère la série : $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Récap

1. DL de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2
   $\alpha = \dfrac{3}{8}$
2. $\dfrac{\pi}{2} \implies \cos \to \sin$
   TSA puis Riemann
3. Équivalent $\alpha\dfrac{\pi}{n}$ qui dv

Exercice 47

Énoncé

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$
2. $\displaystyle\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Récap

1. D'Alembert
   DSE de $\ln(1+t)$
2. Rayon minimum des deux séries
   Multiplier le 2^e par $5x$ pour commencer à 0
   Identifier DSE de $\dfrac{1}{1-x}$

Exercice 48

Énoncé

$\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur $[0,1]$.

Récap

1. /
2. (a) Jeu avec les normes et valeurs absolues
   (b) Interversion limite-intégrale
3. $\forall n, \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0$

Exercice 49

Énoncé

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, +1[, f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Récap

1. (a) Chaque $|a_n|$ est plus petit que la somme
   (b) (a_n) est bornée, puis reconnaître une série exponentielle
2. (a) IPP (Γ)
   (b) Interversion série-intégrale et utilisation de $\int g_n(t)\mathrm{d}t$

Exercice 50

Énoncé

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-2t}}{x+t}\mathrm{d}t$

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$

Récap

1. Théorème de continuité d'intégrales à paramètres

   $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{a} e^{-2t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
2. Convergence dominée

Exercice 51

Énoncé

1. Montrer que la série $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donne le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Récap

1. Calculer d'abord $\dfrac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}$ et séparer le $(2n+2)!$
2. DSE de $(1+x)^\alpha$
3. Changer $t \to t^2$ puis théorème de Kilian
4. Calculer Arcsin $\frac{1}{2}$

Exercice 52

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^4-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

1. Prouver que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette section, on suppose que $\alpha = 0$
   (a) Justifier l'existence de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Récap

1. Passer de l'autre coté et reconnaître égalité remarquable
2. (a) Dénominateur non nul
   (b) Continuité en $(0,0)$
3. (a) /
   (b) Limite du taux d'accroissement
   (c) Poser $r = \sqrt{(}x^2+y^2)$, alors $|x| \leqslant r$ et $|y| \leqslant r$
   (d) Majorer $|\partial_1 f(x,y) - \partial_1 f(0,0)|$ et $|\partial_2 f(x,y) - \partial_2 f(0,0)|$ avec r

Exercice 53

Énoncé

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors : $\forall x \int \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?
   (c) $\sum\limits_{n \geqslant} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Récap

1. (a) /
   (b) Majorer la valeur absolue avec a et b
   (c) Bornée pour existence du sup puis minorer par les $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$
2. cvu + f_n $\mathcal{C}^0$
3. Interversion limite et série

Exercice 54

Énoncé

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, ||u|| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||.||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

Récap

1. Classique
2. (a) Classique
   (b) $\forall n, |u_n| \leqslant ||u||$
   (c) f est linéaire et inégalité triangulaire

Exercice 55

Énoncé

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + (ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de a.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Récap

1. (a) $u_n - v_n$
   (b) Isomorphisme à $\mathbb{C}^2$
2. Nombre de racines
   Cas $a = -2i$ et $a \neq -2i$

Exercice 56

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3x^2 + 2$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Récap

1. ∂f pour points critiques
   Hessienne -¿ Signe pour existence (valeurs propres de même signe) et trace pour signe des valeurs propres :
   $\begin{cases} > 0 \implies \text{min} \\ < 0 \implies \text{max} \end{cases}$
2. Prendre $f(x, 0)$
3. Compacité
   Points critiques pas dans K donc étude des bords de K.

Exercice 57

Énoncé

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$
   (b) Donner la définition de "f différentiable en $(0,0)$".
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Récap

1. (a) Avec une boule
   (b) Avec une application linéaire
2. Prendre la norme usuelle de $\mathbb{R}^2$
   (a) Continuité numérateur / dénominateur sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et continuité en $(0,0)$ par inégalité triangulaire
   (b) Existence et continuité des dérivées partielles, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ puis en $(0,0)$

Exercice 58

Énoncé

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \to F$ une application.
   Donner la définition de "f est différentiable en a".
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E, ||x||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x,y) \in E \times E, ||(x,y)|| = \max(||x||_\infty, ||y||_\infty)$.
   On admet que $||.||_\infty$ est une norme sur E et que $||.||$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
   (a) Prouver que $\exists C \in \mathbb{R}^+, \forall (x,y) \in E \times E, |B(x,y)| \leqslant C||x||_\infty ||y||_\infty$.
   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 59

Énoncé

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : Si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(}n + 1)$?
3. f est-il diagonalisable ?

Récap

1. Montrer que f est un endo.
   (a) Injective + dim finie
   (b) det M $\neq 0$
2. Ecrire $Q^{(i)}$ et $P^{(n+1)} = 0$
3. $\chi_f = (X - 1)^{n+1}$ et $f \neq Id_E$

Exercice 60

Énoncé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de Ker$f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de Imf.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}f \oplus \text{Im}f$?

Récap

1. $M \in \text{Ker}f \iff$ ...
2. Ker$f \neq \{0\}$ + dimension finie
3. $M \in \text{Im}f \iff$ ...
4. Soit $M \in \text{Ker}f \cap \text{Im}f$...

Exercice 61

Énoncé

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $||A|| = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, ||AB|| \leqslant n||A||||B||$.
   Puis démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1, ||A^p|| \leqslant n^{p-1}||A||^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

Récap

1. /
2. $|a_{i,j}| \leqslant ||A||$
   Récurrence sur p
3. $\left|\left|\dfrac{A^p}{p!}\right|\right| \leqslant \dfrac{1}{n}\dfrac{(n||A||)^p}{p!}$
   Comparaison des séries à termes positifs + dimension finie

Exercice 62

Énoncé

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux,
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Récap

1. Factoriser $f^2 - f - 2\mathrm{Id}$ (f est linéaire)
2. (a) Utiliser $P = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$ et $P(f) = 0$
   (b) Analyse : $x = a + b$, trouver a et b puis synthèse
3. Théorème du rang

Exercice 63

Énoncé

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u \circ u^* = u * \circ u$
   (b) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$
   (c) $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||u^*(x)||$

Récap

1. Rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
2. $a \iff b$: def adjoint puis bilinéarité
   $b \iff c$: $(u(x)|u(x))$ puis linéarité

Exercice 64

Énoncé

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \implies \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \iff \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \implies E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Récap

1. Double inclusion
2. (a) Critère de rang et de dimensions + théorème du rang
   (b) Montrer $\oplus$, puis théorème du rang

Exercice 65

Énoncé

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$: (P polynôme annulateur de u) $\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Récap

1. /
2. (a) $PQ = QP$
   (b) /
3. Théorème de Cayley-Hamilton
   $R(0) = R(1) = 0$, factoriser

Exercice 66

Énoncé

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \implies A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$.

Récap

1. $X^T AX \geqslant 0$ et $X \neq 0$
   Théorème spectral : écriture en diag
   PAS FINI

Exercice 67

Énoncé

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Récap

1. Calculer χ_M puis disjonction sur le signe de $ac - ba - bc$

   Semblable à la matrice nulle ?

   χ_M scindé sur $\mathbb{R}$?

Exercice 68

Énoncé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
   (a) sans calcul
   (b) en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres
   (c) en utilisant le rang de la matrice
   (d) en calculant A^2
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée.

   Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Récap

1. (a) Théorème spectral
   (b) $\sum \dim SEP = 3$
   (c) $\sum \dim SEP = 3$
   (d) $X^2 - 3X$ est scindé à racines simples
2. SEP orthogonaux

   Fabriquer les e_i à partir des SEP = Vect(...)

Exercice 69

Énoncé

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Récap

1. Calculer $\det A$ puis disjonction $a = 0, a = -1, a \notin \{0, -1\}$
2. Calculer χ_A puis si a est une racine ou non
   $\dim E_r =$ multiplicité de r ?

Exercice 70

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1** les éléments propres de B.

Récap

1. Calculer χ_A puis les vecteurs propres
2. Construire la matrice de passage P et la matrice diagonale D des valeurs propres
   Poser Q le polynôme correspondant à B
   $E_{Q_(\lambda)}(B) = E_\lambda(A)$
   Distinguer selon les égalités entre les $Q(\lambda)$

Exercice 71

Énoncé

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Récap

1. $D = \mathrm{Vect}(1, 2, 3)$ qui ne marche pas pour P puis argument de dimension
2. $p(u) \in P, u - p(u) \in D$, trouver le coeff de proportionnalité pour le $\mathrm{Vect}(1, 2, 3)$ et réécrire $p(u)$
3. Concaténation des bases de D et de P

Exercice 72

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
On pose que $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Récap

1. Disjonction $v = 0$ et $v \neq 0$
2. Ecrire χ_f
   Disjonction $v = 0$ et $v \neq 0$
   Dans le deuxième cas, disjonction $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$

Exercice 73

Énoncé

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}(I_2, A)$.

Récap

1. /
2. Utiliser PDP^{-1} avec P inversible

Exercice 74

Énoncé

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.

   En utilisant la question 1 et en le justifiant, résoudre ce système.

Récap

1. (a) Théorème spectral
   (b) Développer le det sur la ligne du milieu et reconnaître $X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3)$
2. Poser $X = (x(t), y(t), z(t))^T$, pour $(S) \iff X' = AX$

   Diagonaliser A avec la matrice de passage vers la base de la question 1

   Dériver et résoudre les équas diffs d'ordre 1 sur chaque ligne

Exercice 75

Énoncé

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Récap

1. χ_A scindé à racines simples ?
2. La seule valeur propre est 1

   Trouver v_2 tq $f(v_2) = v_1 + v_2$
3. Poser $A = PTP^{-1}$, X et $Y = P^{-1}X$

Exercice 76

Énoncé

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$.

   Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Récap

1. Poser $P(\lambda) = ||x + \lambda y||^2$ puis faire $y = 0$ et $y \neq 0$ (second avec discriminant)

   Égalité quand colinéaire, prouvée par double implication
2. Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+^*)$

   Montrer non vide pour existence du min ($f : t \mapsto 1$)

   Utiliser $\int_a^b \sqrt(f(t))\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{f(t)}}$

   min atteint avec $f : t \mapsto 1$

Exercice 77

Énoncé

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E
   Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.

2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 78

Énoncé

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.
On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $||.||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x[y])$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Récap

PAS FAIT

Exercice 79

Énoncé

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(t)\mathrm{d}t = 0 \implies h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Récap

PAS FAIT

Exercice 80

Énoncé

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$
   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Récap

1. BSDP
   Attention pour la définition : on montre $f = 0$ en montrant $f = 0$ sur $[0, 2\pi]$ avec l'intégrale et la 2π-périodicité
2. Utiliser $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et poser $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}$

Exercice 81

Énoncé

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}(A^T A')$, où $\mathrm{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Récap

1. $M = aI_2 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. /
3. $J = J_{//} + J_\perp$
4. Distance avec le projeté orthogonal

Exercice 82

Énoncé

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $||x - y_0||$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Récap

1. /
2. $(\text{triangulaire sup}|\text{triangulaire inf}) = 0$

Exercice 83

Énoncé

Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.

   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1 reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, montrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Récap

1. Appliquer v, trouver le vecteur propre $v(x)$
2. Simplifier les expressions de $u \circ v$ et $v \circ u$
3. $\det(u \circ v) = \det u \det v = \det v \det u = \det(v \circ u)$

Exercice 84

Énoncé

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Récap

PAS FAIT

Exercice 85

Énoncé

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Récap

1. /
2. Formule de Taylor + unicité de la décomposition
3. Vérification avec le déterminant

Exercice 86

Récap

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!], p$ divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \mod 1$.

Récap

1. Écrire Bézout pour a et b et multiplier les égalités
2. (a) Écrire $\binom{p}{k}$ avec les factorielles
   Théorème de Gauss avec $k < p$ et p premier pour conclure
   (b) Écrire $(n+1)^p$ avec le binôme de Newton pour la récurrence
   (c) $n^p \equiv n \bmod p \iff p|(n^p - n) \iff p|n(n^{p-1} - 1)$
   Théorème de Gauss avec $p \wedge n = 1$
   $p|n^{p-1} - 1 \iff n^{p-1} \equiv 1 \mod p$

Exercice 87

Énoncé

Soient $a_0, a_1, ..., a_n n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, ..., b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall i \in [\![0,n]\!], P(a_i) = b_i$.
2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
   $\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0,n]\!], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$

Récap

1. Montrer que $u : P \mapsto (P(a_0)...P(a_n))$ est linéaire et injective donc bijective (pour unicité)
2. $\deg L_k \leqslant n$ et n racines (tous les a_i sauf a_k) : $L_k = \lambda_{i\neq k} \prod (X - a_i)$
   Utiliser $L_k(a_k) = 1$ pour trouver la valeur de Λ pour trouver polynôme interpolateur de Lagrange : $\displaystyle\prod_{i\neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$
3. Mêmes conditions d'interpolation et unicité de la question 1

Exercice 88

Énoncé

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E, u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1).

Récap

1. $u^k(x) = \lambda^k x$
   Bien dire que vecteur propre $neq0$
2. (a) Calculer $u^2(M)$
   (b) Non
      i. $P = (X-1)^2$, faire Sp $\subset$ puis $\supset \{1\}$
      ii. $\pi_u | (X-1)^2$ puis scindé à racines simples

Exercice 89

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Récap

1. Factoriser le 1

2. Euler

Exercice 90

Énoncé

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\phi : \begin{array}{lll} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2, L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.

3. Soit $P \in \mathbb{K}^2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

4. **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Récap

1. /

2. (a) Image réciproque d'une base par un isomorphisme
   (b) Factoriser

3. /

4. On cherche P tq $(P(a_1,)P(a_2), P(a_3)) = (1, 3, 1)$

Exercice 91

Énoncé

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Récap

1. $L2 - L1$ et $L3 - L1$
2. 0 dans spectre ? Semblable à I_n ?
3. Noter les polynômes possibles
4. Réécrire X^n

Exercice 92

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique si $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Récap

1. /
2. (a) $S = \dfrac{M + M^T}{2}, A = \dfrac{M - M^T}{2}$
   (b) Montrer $\langle A, B \rangle = 0$
3. Utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 93

Énoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E

1. Montrer que $\Im(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\Im u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.
   Remarque : les questions 1, 2 et 3 peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Récap

1. Poser $y \in \mathrm{Im} u \cap \mathrm{Ker} u$
2. (a) /
   (b) Lemme des noyaux avec $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$
3. $0 \in \mathrm{Sp} u \iff u$ est injectif

Exercice 94

Énoncé

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$
   Prouver que : $(a|c$ et $b|c) \iff ab|c$.
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6[17] \\ x \equiv 4[15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Exercice 95

Énoncé

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X. (b) Déterminer la loi de Y.

Récap

1. (a) Loi binomiale (b) $Y = 2X - 3(5 - X) = 5X - 15$
2. (a) Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments avec k boules blanches et $5 - k$ boules noires.
   Faire les E_k ces parties et les nb de possibilités avec les parmi.
   (b) $Y = 5X - 15$

Exercice 96

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n\mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.
La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$
   On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[, G_S(t) = G_{x_1}(t)G_{X_2}(t)$:
   (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
   (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.

   Remarque : on admettra la généralisation à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.
   On note S_n la somme des numéros tirés.
   Soit $t \in]-1, 1[$.
   Déterminer $G_{s_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.

Récap

1. X est une proba
2. (a) Poser les 3 rayons de cv et le cours sur le produit de Cauchy
   Poser $S_n = \bigcup \left[(X_1 = k) \cap (X_1 = n - k)\right]$
   (b) $t^{X_1+X_2} = t^{X_1}t^{X_2}$ et linéarité de l'espérance
3. Etudier un X_i pour écrire G_{X_i} et utiliser la question 2 et $\dfrac{1}{4^n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n-k}$ pour retrouver une loi binomiale

Exercice 97

Énoncé

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, P((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{ej!k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.

   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Prouver que $E[2^{X+Y}]$ existe et la calculer.

Récap

PAS FAIT

Exercice 98

Énoncé

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p ($p \in]0,1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.

2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}, P(Y = k | X = i)$.

   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Récap

PAS FAIT

Exercice 99

Énoncé

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$.

   On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0.35 et 0.45 ?

   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.

Récap

1. Préciser X^2 d'espérance finie
2. Avec $X = \frac{S_n}{n}$, linéarité de l'espérance et $V(aX + B) = a^2 V(X)$
3. Poser les Y_i tels que proposés, S_n et X comme précedemment

Exercice 100

Énoncé

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fractions rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

Récap

PAS FAIT

Exercice 101

Énoncé

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À $t = 0$, il se trouve au point A.

Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un deux deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement "l'animal est en A après son n^{ieme} trajet". On note B_n l'événement "l'animal est en B après son n^{ieme} trajet". On note C_n l'événement "l'animal est en C après son n^{ieme} trajet".

On pose $P(A_n) = a_n, P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Récap

1. (a) Dire que c'est un système complet d'événements.
2. (a) Théorème spectral
   (b) Poser $U = (1, 0, -1)^T$ et $V = (0, 1, -1)^T$ et faire AU et AV
   (c) $P : 1, U, V$
3. $apres = A \times avant$

Exercice 102

Énoncé

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} X_i$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$ puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Récap

1. $(X_i \leqslant n) = \bigcup_{k=1}^{n}(X_i = k)$ puis système complet d'événements
2. (a) min : tous plus petits que donc $(Y > n) = \bigcap_{i=1}^{N}(X_i > n)$
   (b) Réécrire $P(Y = n)$ avec $q^{(n-1)N} = (1 - (1 - q)N)^{n-1}$ pour retrouver $\mathcal{G}(1 - q^N)$

Exercice 103

Énoncé

Remarque : les question 1 et 2 sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in (]0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle le X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p). Déterminer la loi de X.

Récap

1. (a) Poisson + Poisson = Poisson
   (b) Poisson : $E = V = \lambda$
2. Probas totales

Exercice 104

Énoncé

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3. (a) Calculer $E(X)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Récap

1. /
2. (a) Choisir les non vides puis le vide
   (b) Idem pour 1, différence pour 0
3. (a) $E = \sum kP(X = k)$
   (b) Bien réfléchir à la phrase

Exercice 105

Énoncé

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés, dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).

   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer est $\dfrac{1}{2}$.

   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Récap

1. Attention $P(B) \neq 0$ et système complet
2. Bien poser les événements "on obtient un 6" et "le dé est pipé

Exercice 106

Énoncé

X et Y sont deux variables indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall n \in \mathbb{N}, P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de W.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

Récap

1. $P\big((U = a) \cap (V = b)\big)$ et disjonction $a = b$ ou $a > b$ ($a < b$ impossible)
2. Calculer $P(U = n)$ par disjonction $n = 0$ ou $n \geqslant 1$
3. $P(W = n) = P(V = n - 1)$ et $E(W) = E(V) + 1$
4. Contre exemple avec $U = 0$ et $V = 1$

Exercice 107

Énoncé

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et quatre boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n^{eme} tirage est blanche" et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = \dfrac{-6}{35}p_n + \dfrac{7}{4}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Récap

1. Probas totales avec U_1 et U_2
2. Probas totales avec B_n et $\overline{B_n}$
3. Poser $u_n = p_n - l$ tq $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ géométrique puis retrouver $p_n = u_n + l$

Exercice 108

Énoncé

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i \cap Y = j) = \dfrac{1}{e2^{i+1}j!}$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

Récap

PAS FAIT

Exercice 109

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Récap

1. $(X = 1)$: "obtenir une boule blanche au premier tirage"
   $(X = 2)$: obtenir une boule noire au premier tirage et une boule blanche au deuxième"
   $(X = 2)$: obtenir une boule noire au premier et au deuxième tirage et une boule blanche au troisième"
2. Poser A_k : "une boule ne comportant pas le numéro 1 est tirée au k-ième tirage"

Exercice 110

Énoncé

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $]-1, 1[\subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé de $]-1, 1[$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Récap

1. (a) P est une proba puis théorème de transfert
   (b) Bien dire que G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$
2. (a) Reconnaître la série exponentielle
   (b) Calculer G_Z, en précisant l'indépendance
   Reconnaître la loi de Poisson

Exercice 111

Énoncé

On admet, dans cet exercice, que :$\forall q \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1,1[, \sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum\limits_{k \geqslant 0} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$.
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p^n) & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X

Récap

1. La somme vaut 1
2. (a) Loi marginale
   (b) $Y+1 \sim \mathcal{G}(p)$
   (c) Espérance d'une loi géométrique
3. Loi marginale puis réexprimer le dénominateur

Exercice 112

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble contenant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Récap

1. Compter les couples tels que $A \subset B$ et $\mathrm{Card} B = p$ pour tout p.
2. $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \overline{B}$
3. $A \cup B \cup C = E \iff C = \overline{A \cup B}$